Optimisation globale déterministe

Programmation par intervalles et branch and bound

A l'origine

- Soit la fonction:

  $f(x,y) = 333.75\, y^6 + x^2\,(11\, x^2 y^2 - y^6 - 121\, y^4 - 2) + 5.5\, y^8 + x\, /\, (2y)$
- Si l'on calcule f(77617,33096), on obtient environ 1.172603.
- La valeur correcte est -0.827396.
- La programmation par intervalle a été utilisée au départ pour éviter les erreurs d'arrondi.

Opérations élémentaires

- Soit deux intervalles $X=[a,b]$ et $Y=[c,d]$
- $X+Y=[a+c,b+d]$ et $X-Y=[a-d,b-c]$
- $X*Y=$
  - $[ac,bd]$ si $a>0$ et $c>0$
  - $[bc,bd]$ si $a>0$ et $c<0<d$
  - $[bc,ad]$ si $a>0$ et $d<0$
  - $[ad,bc]$ si $a<0<b$ et $c>0$
  - $[bd,ad]$ si $a<0<b$ et $d<0$
  - $[ad,bc]$ si $b<0$ et $c>0$
  - $[ad,ac]$ si $b<0$ et $c<0<d$
  - $[bd,ac]$ si $b<0$ et $d<0$
  - $[\min(bc,ad),\max(ac,bd)]$ si $a<0<b$ et $c<0<d$

La division

- Il faut étendre R en lui ajoutant +∝/–∝
- X/Y=
  - [b/c,+ ∝] si b<0 et d=0
  - [- ∝,b/d] et [b/c,+ ∝] si b<0 et c<0<d
  - [- ∝,+ ∝] si a<0<b
  - [- ∝,a/c] si a>0 et d=0
  - [- ∝,a/c] et [a/d,+ ∝] si a>0 et c<0<d
  - [a/d,+ ∝] si a>0 et c=0

Autres opérations

- Toutes les opérations peuvent être étendues à la programmation par intervalle.
- Pour les fonctions monotones:
  - $F([a,b])=[f(a),f(b)]$ si f croissante
  - $F([a,b])=[f(b),f(a)]$ si f décroissante
  - Exemple: $Exp([a,b])=[e^a,e^b]$
- Les compositions de fonction se traitent en composant les fonctions d'extension sur les intervalles.

Le problème de dépendance

- Soit $X=[a,b]$, $X-X = [a-b,b-a] <> [0,0]$!
- De la même façon $(X-1)(X+1) <> X^2-1$
- $([0,2]-1)([0,2]+1)=[-1,1]*[1,3]=[-3,3]$
- $[0,2]^2-1=[0,4]-1=[-1,3]$
- L’associativité est conservée:
  - $A+(B+C)=(A+B)+C$
  - $A(BC)=(AB)C$
- Distributivité perdue: $A(B+C)<>AB+AC$

Branch and bound

- Nom générique recouvrant des techniques de recherche divisant l’espace de recherche et éliminant des parties de l’espace en fonction de bornes.
- Dans le cas présent, c’est la division de l’espace en sous intervalle qui crée les branches, et le calcul d’un estimateur par intervalle qui crée les bornes.

Minimisation

- Initialiser: L<-{[a,b]} et e=estimateur de f sur [a,b]
  - Extraire I=[c,d] de L. Si e<c, réitérer. Si l'intervalle vérifie le test de fin, réitérer. Si L est vide: fin.
  - Construire $I_1=[c,(c+d)/2]$ et $I_2=[(c+d)/2,d]$.
  - Calculer $F(I_1)=[x_1,y_1]$, $F(I_2)=[x_2,y_2]$, e_1 et e_2.
  - Prendre e=min(e,e1,e2)
  - Si $x_1<e$ alors insérer I_1 dans L
  - Si $x_2<e$ alors insérer I_2 dans L
  - Réitérer.

Calcul d’un estimateur

- Soit X=[a,b]. Plusieurs méthodes:
  - Moyen le plus simple: e=f((a+b)/2)
  - Technique de sampling: prendre n points régulièrement répartis dans X
  - Technique stochastique: tirer au hasard n points dans X
  - Calculer f’(x) et F’(X) et regarder si le signe de la dérivée est constant sur X, auquel cas f est monotone

Insertion d'un élément

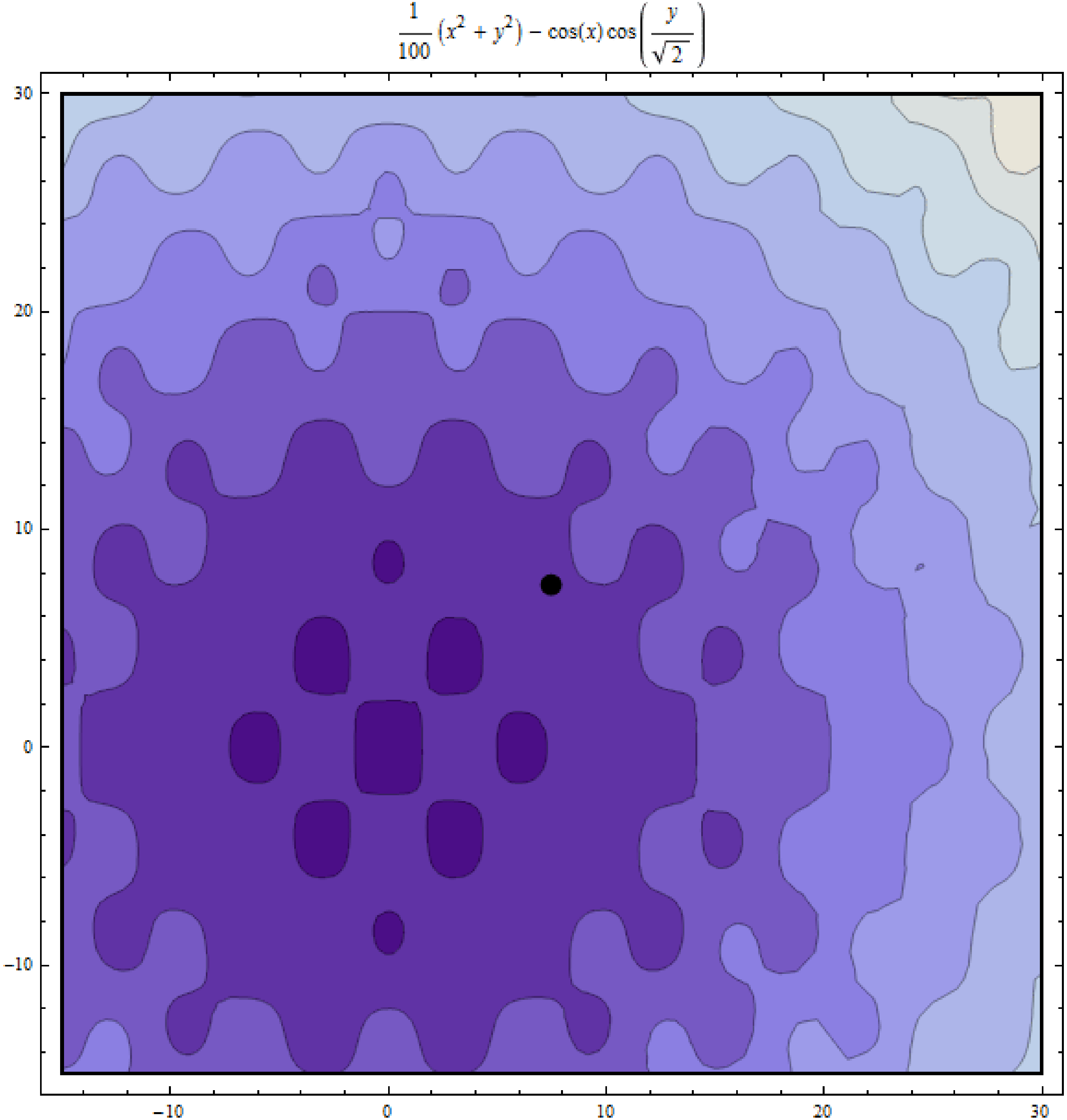
- Plusieurs possibilités pour insérer:
  - First In First Out
  - En fonction de la taille de l'intervalle (le plus grand en tête)
  - En fonction de l'estimateur (le plus petit en tête)
  - En fonction de la borne inférieure (la plus petite en premier)
  - etc...

Test de fin

- Plusieurs possibilités:
  - La taille de l'intervalle est inférieure à une quantité fixée.
  - La taille de l'image de l'intervalle est inférieure à une quantité fixée...
  - Etc...

Extension à plus d'une dimension

- Pour une fonction à plusieurs variables, la dichotomie se fait variable par variable.
- On coupera systématiquement en deux l'intervalle le plus grand parmi ceux décrivant toutes les variables.
- On fait évoluer en conséquence le test de fin.


$\frac{1}{100}(x^2+y^2)-\cos(x)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$
30
20
10
0
−10
−10
0
10
20
30

Quand l’utiliser

- Méthode extrêmement efficace lorsqu’il y a peu de variables.
- Le temps de calcul croit comme 2^N ou N désigne le nombre de variables.